avec $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, alors $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

Ça implique A et B ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques.

Pour la 2ème question du quiz :

Par déf : $\underbrace{\mathrm{mult}_g(0)}_{=25 \text{ donnée !!}} = \dim(E_0) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 0 \cdot I_{50}))$

$= \dim(\mathrm{Ker}(A))$

Chapitre 10 : Diagonalisation

DÉF 10.4 On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}.A.P$ est diagonale

(i.e.

$$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

)

THM 10.6 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres $\boxed{\text{différentes}}$ de A et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs propres de A associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, resp. Alors $\{v_1, \dots, v_p\}$ est libre.

(Preuve pour $p = 2$) $\{v_1, v_2\}$ est lié $\Rightarrow$ SPdg $v_2 = \mu \cdot v_1$ avec $\mu \in \mathbb{R}$

Alors

$$\mu \lambda_2 v_1 = \lambda_2 v_2 = A v_2 = A \mu v_1 = \mu A v_1 = \mu \lambda_1 v_1$$

$$\Rightarrow (\mu \cdot \lambda_2 - \mu \lambda_1) v_1 = 0 \Rightarrow \mu \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{v_1}_{\neq 0 \text{ car } v_1 \text{ propre}} = 0$$

Alors $\mu = 0 \Rightarrow v_2 = 0 \cdot v_1 = 0$ Abs car v_2 vecteur propre. $\square$

$\boxed{\text{THM 10.8}}$ Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $\exists \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ base avec chaque $\bar{v}_i$ vecteur propre de A

$(\Leftarrow)$

Dans notre cas, pour $P := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$

Comme $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$, P est inversible et $P = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}}$

En plus

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\bar{v} \mapsto A.\bar{v}$

$$P^{-1}.A.P = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} . [T]_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}}$$

$$= \left[T\right]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$$

THM de changement de base

$$= \Big[\left[T(v_1)\right]_{\mathcal{B}} \ \cdots \ \left[T(v_n)\right]_{\mathcal{B}} \Big]$$

d'ef de représentation matricielle de T

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diagonale !!

Car

$T(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$

$\Rightarrow [T(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$?

$T(v_2) = 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_n$

$\Rightarrow [T(v_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$?

EXM Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$

- Calculer valeurs propres
- Calculer base de chaque espace propre.
- Est-ce que A est diagonalisable ?

(i) $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9-\lambda & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 7/9-\lambda & -8/9 \\ -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-1)\cdot\left[(\lambda-7/9)(7/9+\lambda) - (8/9)\cdot(4/9)\right]$$

$$= -(\lambda-1)\left[\lambda^2 - \frac{7^2}{81} - \frac{32}{81}\right] = -(\lambda-1)(\lambda^2-1)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$\Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad$ oo $\quad \lambda = 1$

$(\text{mult}_a(-1) = 1)$ $\qquad$ $(\text{mult}_a(1) = 2)$

(ii) $E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longleftarrow \text{mult}_g(1) = 2$

$E_{-1} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \longleftarrow \text{mult}_g(-1) = 1$

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$ (d'après le premier THM).

$\Longrightarrow$ A diagonalisable